11-10-2018.

Σημείωση: Το γεγονός ότι οι προτάσεις $p\wedge(q\wedge r)$ και $(p\wedge q)\wedge r$ είναι ισοδύναμες. Μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τον (κοινό) συμβολισμό $p\wedge q\wedge r$ παραλείποντας τις παρενθέσεις.

Ομοίως $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge p_4 = ((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge p_4$

Γενικότερα $p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_k = (((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge\ldots\wedge p_{k-1})\wedge p_k$.

Η πρόταση αυτή είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που οι $p_1\ldots p_k$ είναι όλες αληθείς.

Λογικές αποδείξεις:

Ορισμός. Αν $p_1\ldots p_k, q$ είναι προτάσεις ώστε η πρόταση $(p_1\wedge p_2\wedge\ldots p_k)\Rightarrow q$ να είναι ταυτολογία. Λέμε ότι έχουμε μια λογική απόδειξη με υποθέσεις τις $p_1\ldots p_k$ και συμπέρασμα την q.

Σε αυτή την περίπτωση συμβολικά χρησιμοποιούμε το σχήμα

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ \hline q \end{array}$$

Τα παρακάτω σχήματα, όπως εύκολα μπορεί να ελεγχθεί αποτελούν λογικές αποδείξεις.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \wedge p \\ \hline p \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ \hline p \wedge p \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Για την τελευταία πρέπει ν.δ.ο. η $((p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)) \Rightarrow (\sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p) \Rightarrow (\sim p)$	$\sim p$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

Για την δεύτερη πρέπει ν.δ.ο. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

Άρα η Π είναι ταυτολογία συνεπώς το σχήμα

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

αποτελεί λογική απόδειξη.

Σύνολα - Βασικές Έννοιες

Διαισθητικός ορισμός:

Σύνολο είναι μια καθορισμένη συλλογή αντικειμένων (και αποτελεί και το ίδιο ένα μαθηματικό αντικείμενο). Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο ονομάζονται στοιχεία του συνόλου.

Συνήθως (αλλά όχι πάντοτε) συμβολίζουμε τα σύνολα με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφαβήτου και τα στοιχεία τους μικρά γράμματα.

Αν A είναι ένα σύνολο και x ένα αντικείμενο υπάρχουν δύο αμοιβαίως αποκλειόμενες περιπτώσεις.

1η περίπτωση: Το x ανήκει στο σύνολο A (ή αλλιώς το x είναι στοιχείο του A). Συμβολίζουμε με $x \in A$.

2η περίπτωση: Το x δεν ανήκει στο σύνολο A (ή αλλιώς το x δεν είναι στοιχείο του A) και συμβολίζουμε $x \notin A$.

Η δεύτερη περίπτωση είναι η άρνηση της πρώτης περίπτωσης

$$\sim(x \in A) \leftrightarrow x \notin A.$$

Ορισμός: Έστω A, B δύο σύνολα. Λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B αν κάθε στοιχείο που ανήκει στο A ανήκει και στο B. Συμβολίζουμε $A \subseteq B$.

Όταν $A \subseteq B$ λέμε επίσης ότι το B είναι υπερσύνολο του A και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $B \supseteq A$.

Ορισμός: (Αρχή της έκτασης)
Δυο σύνολα A, B λέγονται ίσα αν ισχύει $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.
Συμβολίζουμε $A = B$ έτσι $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

Όταν το A δεν είναι υποσύνολο του B συμβολίζουμε $A \not\subseteq B$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει x ώστε $x \in A$ και $x \notin B$.

Όταν το A δεν είναι ίσο με το B συμβολίζουμε $A \neq B$.
$A \neq B \Leftrightarrow \sim(A = B) \Leftrightarrow \sim(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow$
$(\sim(A \subseteq B) \vee (\sim B \subseteq A)) \Leftrightarrow A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A$

Χρησιμοποιήσαμε ότι
η $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
είναι ταυτολογία.

Ιδιότητες της "$\subseteq$"
α) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A (αυτοπαθής ή ανακλαστική ιδιότητα)
β) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$ για οποιαδήποτε σύνολα A, B (αντισυμμετρική ιδιότητα)
γ) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$ για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ (μεταβατική ιδιότητα)

Ορισμός: Λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B και συμβολίζεται $A \subset B$. Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$. Στην περίπτωση αυτή το B λέγεται γνήσιο υπερσύνολο του A και συμβολίζουμε $B \supset A$.

Εξ ορισμού $A \subset B \Leftrightarrow B \supset A$.

Ορισμός. Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται κενό σύνολο και συμβολίζεται $\emptyset$ (ή με $\{\}$).

Για κάθε σύνολο A ισχύει $\emptyset \subseteq A$.

Περιγραφή Συνόλων.

α) Με αναγραφή των στοιχείων τους: Ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία x, y, z και μόνο αυτά θα το συμβολίζαμε με $\{x, y, z\}$. Η σειρά με την οποία αναγράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου δεν έχει σημασία.

β) Μέσω προτασιακών τύπων.

Αν A είναι δοθέν σύνολο και $P(x)$ προτασιακός τύπος (θα εξηγήσουμε παρακάτω)

$B = \{x \in A : P(x)\}$ είναι ένα νέο σύνολο.

Σημείωση: Ένα σύνολο μπορεί να είναι στοιχείο άλλων συνόλων δηλαδή ένα σύνολο μπορεί να περιέχει ως στοιχεία του άλλα σύνολα έτσι πχ $\{\emptyset\}$ είναι ένα σύνολο που περιέχει ως μόνο του στοιχείο το $\emptyset$.

Παραδείγματα.

$A = \{1, 5, 8\}$, $B = \{1, 3, 9, 10\}$, $\Gamma = \{5, 8\}$.

Τότε $\Gamma \subseteq A$

$A \nsubseteq B$ {διότι $5 \in A$ ενώ $5 \notin B$}

$\Gamma \nsubseteq B$ {$5 \in \Gamma$ ενώ $5 \notin B$}

$A \nsubseteq \Gamma$ ($1 \in A$ ενώ $1 \notin \Gamma$)

$B \nsubseteq A$ και $B \nsubseteq \Gamma$

ii) Η πρόταση αυτή $\phi \in \phi$ είναι ψευδής.
Η πρόταση αυτή $\phi \in \{\phi\}$ είναι αληθής.
(Το $\{\phi\}$ είναι ένα σύνολο που περιέχει ένα μόνο στοιχείο το ϕ)

iii) Η πρόταση $\alpha \in A$ ισοδυναμεί με την πρόταση $\{\alpha\} \subseteq A$.

iv) Η πρόταση $\{x, y\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ είναι αληθής.

Η πρόταση $\{x, y\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$ είναι ψευδής διότι $x \in \{x, y\}$ ενώ $x \notin \{\{x\}, \{x, y\}\}$

(αυτό το σύνολο έχει δύο στοιχεία το $\{x\}$ και το $\{x, y\}$.)

Προτασιακοί τύποι

Εκφράσεις που περιέχουν μια ελεύθερη μεταβλητή ώστε όταν η μεταβλητή πάρει συγκεκριμένες τιμές γίνονται λογικές προτάσεις, λέγονται προτασιακοί τύποι. Τους συμβολίζουμε $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$

Προτασιακός τύπος:

α) $x > 3$ $P(x)$

β) Ο x είναι κάτοικος της Ελλάδας $Q(x)$.

γ) Ο αριθμός x διαιρεί το 20 $R(x)$.

Όταν το x πάρει τιμή οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό η $P(x)$ μετατρέπεται σε λογική πρόταση.

Επίσης υπάρχουν προτασιακοί τύποι με δύο ή περισσότερες ελεύθερες μεταβλητές $x + y \geq 4$, είναι προτασιακός τύπος με δύο ελεύθερες μεταβλητές το x, y και μπορεί να συμβολιστεί $P(x, y)$

Ομοίως $x>y$.
Ομοίως $x^2+y^2+z^2=1$.

Ποσοδείκτης:
α) Ο προτασιακός τύπος «ο αριθμός x διαιρεί το 24"
με την προσθήκη του συνδέσμου x «για κάθε» ή «κάθε»
γίνεται «κάθε αριθμός x διαιρεί το 24». ή «για κάθε
αριθμό x ο x διαιρεί το 24».

Έτσι αν $P(x)$ είναι ο προτασιακός τύπος $x^2 \geq 0$ γίνεται με
χρήση του «για κάθε» ή «για κάθε x ισχύει $x^2 \geq 0$»
συμβολίζεται $\forall x P(x)$.

Το σύμβολο $\forall$ λέγεται καθολικός ποσοδείκτης

Β) Ο προτασιακός τύπος «ο x διαιρεί το 24» με την
προσθήκη του συνδέσμου «υπάρχει». γίνεται
«υπάρχει αριθμός x ώστε ο x να διαιρεί το 24».
Έτσι από τον προτασιακό τύπο $P(x)$, παίρνουμε την
πρόταση "υπάρχει $x: x^2 \geq 0$" η οποία συμβολίζεται
$\exists x P(x)$.
Το $\exists$ λέγεται υπαρξιακός ποσοδείκτης.